

# UN MÉTODO DE COMPROBACIÓN DE SECCIONES EN LOSAS DE HORMIGÓN ARMADO CON FAMILIAS DE ARMADURAS EN DIRECCIONES ARBITRARIAS. PARTE I: LAJAS Y MEMBRANAS

(AN APPROACH TO VERIFY THE REINFORCEMENT IN TWO DIMENSIONAL CONCRETE STRUCTURES REINFORCED BY FAMILIES OF BARS DISPOSED IN ARBITRARY DIRECTIONS. PART I: PLATES AND MEMBRANES)

Jaime G<sup>a</sup> Palacios, Ingeniero de Caminos, C. y P. UPM  
Avelino Samartín, Dr. Ingeniero de Caminos, C. y P. UPM

Fecha de recepción: 12-V-02

ESPAÑA

445-19

## RESUMEN

*Las armaduras en estructuras bidimensionales de hormigón (losas y láminas) se suelen disponer en dos direcciones, típicamente ortogonales. Sin embargo, a veces, particularmente en zonas en las que las tensiones principales son elevadas, se disponen más de dos familias de armaduras y si la geometría del contorno de la estructura no es regular o no es rectangular es preciso colocar familias de armaduras formando ángulos oblicuos entre sí. En general, las direcciones de las tensiones principales en un punto de una estructura bidimensional no coinciden con las de las armaduras, lo que implica una incertidumbre acerca del trabajo de éstas. Esta problemática que aparece en el diseño usual de las estructuras de hormigón armado y pretensado, no suele estar recogida en la mayoría de las instrucciones. En particular, el tratamiento que presenta la norma española HE acerca del armado de las estructuras y elementos distintos de los monodimensionales, es decir, de la viga, es muy escaso.*

*Este trabajo, que se ha dividido en dos partes, presenta un tratamiento unificado de comprobación de las armaduras en estructuras bidimensionales. En esta primera parte se recoge su aplicación a estructuras, tipos laja y membrana, sometidas a esfuerzos de extensión, es decir, axiales y rasantes, contenidos en su plano medio en el caso de lajas o en su plano tangente a la superficie media en el punto de*

## SUMMARY

*Typically reinforcement layout in two-dimensional concrete structures (plates and shells) is designed as two steel bar families placed in orthogonal directions. However, in some cases, particularly in zones where high principal stresses do not coincide with the reinforcement directions it is usual to design an extra level of reinforcement oblique to the general reinforcement. Also, in cases of biased plates may be more convenient, from the construction point of view, to design the direction of the bars reinforcement parallel to the sides of the plate than an orthogonal bar layout. However, these situations, that often occur in actual design of reinforced concrete structures, are not contemplated in the majority of concrete Codes and Recommendations. As an example, in the Spanish Code HE reinforcement design and verification of structures different to beams, like two dimensional structures, is scarcely treated.*

*In this work, that is divided into two parts, an unified approach to verify the reinforcement in two dimensional reinforced concrete structures is presented. In this first part the application of this approach to structures type membrane plate and membrane shell, i. e. structures subjected to in-plane stresses, longitudinal and tangential stresses, is shown. As is standard, the stress resultants, that are obtained by means a*

*comprobación, si se trata de una membrana. Como es usual, los esfuerzos, que se determinan a partir de un cálculo elástico y lineal, se mayoran mediante los pertinentes coeficientes de seguridad para obtener los llamados esfuerzos de cálculo. En este artículo, las armaduras en el punto en el que se comprueba la estructura se disponen con la máxima generalidad, es decir, una o varias familias formando ángulos arbitrarios en planta, y colocadas bien en el plano medio o simétricamente en planos paralelos equidistantes del anterior y separados de las caras superior e inferior de la estructura por los mismos recubrimientos. La segunda parte de este trabajo, que representa una extensión de la metodología al caso general de flexión-extensión, es objeto de una siguiente publicación.*

*La metodología en este trabajo tiene en cuenta las ecuaciones, dadas por la elasticidad, de equilibrio, compatibilidad y constitutivas entre los esfuerzos conocidos y las tensiones y deformaciones en ambos materiales, hormigón y acero. Naturalmente, la ecuación constitutiva del hormigón no considera su resistencia a tracción, y por concreción se utiliza la conocida parábola rectángulo con posibilidad de rama descendente. Para el acero se supone para la relación tensiones-deformaciones un diagrama bilineal, es decir, se tiene en cuenta el posible endurecimiento.*

*El cálculo, que se lleva a cabo mediante un simple programa de computador, permite obtener en pocos segundos las curvas de las tensiones y de las deformaciones en cada una de las familias de barras, así como de las tensiones principales en el hormigón en función del factor de amplificación de los esfuerzos. De esta forma se deduce el nivel de seguridad que se alcanza en un punto de la estructura de hormigón armado.*

*linear elastic analysis, are amplified by a set of safety coefficients in order to reach the so called verification stress resultants. In this paper the reinforcement verification at a point is assumed to be designed with the maximum generality, i. e. it can have either an arbitrary number of curtains of reinforcement, one in the middle plane or two or more symmetrically placed respect to the middle plane of the structure and for each curtain of reinforcement two or more bar directions. The second part of this work, that is an extension of the presented methodology to the general case of plates and shells subjected to bending and axial stress resultants, will be published in a following issue.*

*In the methodology used in this work the standard elasticity equations, namely, equilibrium, compatibility and constitutive equations, among the known stress resultants, stresses and strains of the two materials, concrete and steel, are applied. In the constitutive equations for the concrete its tension strength is not considered and in order to be specific a parabolic-rectangle diagram with a descendent branch is used. For the steel an elastic-plastic behavior is assumed, that is represented by a bilinear stress-strain diagram and in this way hardening effects can be simulated.*

*In order to carry out the proposed procedure to verify the reinforcement and the concrete the use of a desk-top computer generally is required. By application of a simple computer program it is possible to obtain in a few seconds the curves representing the paths of the strains and stresses of each reinforcement family and the principal stresses in the concrete as function of the amplification factor. In this way the safety level at the point under study of the reinforced concrete structure can be obtained.*

## 1. INTRODUCCIÓN

En el dimensionamiento y comprobación de estructuras de hormigón armado se suele distinguir dos fases bien diferenciadas: la determinación de los esfuerzos y la posterior comprobación de la armaduras a partir de éstos.

Tradicionalmente, el cálculo de esfuerzos en las estructuras de hormigón armado se basa en la hipótesis de que el material es linealmente elástico, isótropo y homogéneo. Un cálculo de este tipo se conoce como *elástico* y es muy utilizado en la práctica profesional. Por sus características este análisis es adecuado para predecir el comportamiento de la estructura bajo cargas de servicio o de funcionamiento.

Naturalmente es posible plantear un cálculo que tenga en cuenta el carácter no lineal, no homogéneo y anisótropo del material hormigón armado, con la interacción del hormigón, que se fisura al producirse tracciones, y del acero, capaz de resistirlas. No obstante, dada su complejidad el cálculo de esfuerzos basado en este planteamiento y que se conoce como cálculo *plástico* no es usual en la práctica.

En relación con la comprobación de las armaduras y del hormigón, en estructuras de hormigón armado, existen de forma semejante dos posibilidades. La primera supone que tanto el hormigón como el acero se comportan linealmente, si bien el hormigón es incapaz de resistir tracciones. Este procedimiento de dimensionamiento se suele llamar *elástico* y no se recomienda en las instrucciones actuales de hormigón armado. La segunda posibilidad reconoce en el dimensionamiento de las secciones de hormigón armado el hecho del comportamiento no lineal de ambos materiales y comprueba el estado tensional de los mismos de forma coherente. Este procedimiento de comprobación se denomina *plástico*.

Por consiguiente, al combinar de forma razonable los tipos de cálculo de esfuerzos y de comprobación de tensiones que se acaban de comentar, se pueden distinguir los tres métodos siguientes de diseño de estructuras de hormigón armado:

Método *elástico-plástico*, prácticamente abandonado. La instrucción [19] ha sido la última norma española que lo ha utilizado.

Método *elástico-plástico*, indudablemente el procedimiento usual de diseño de estructuras de hormigón armado. La norma actual española [4] se basa en este método.

Método *elástico-plástico*, sin duda el más riguroso y coherente, ya que utiliza la misma filosofía en ambas fases del dimensionamiento.

Como se ha indicado, de los procedimientos anteriores de diseño de estructuras de hormigón armado, el más utilizado en la práctica profesional actualmente es el *elástico-plástico*. No obstante es el método *plástico-plástico* el que mejor reproduce el complejo comportamiento de estas estructuras, pero su aplicación se limita al diseño de estructuras singulares, o a las que han experimentado un colapso para explicar las causas del mismo. Debido a la presente accesibilidad de computadores potentes, necesarios en el intensivo cálculo que conlleva este método riguroso, se hará cada vez más creciente su aplicación al diseño de estructuras. El desarrollo del método *plástico-plástico* es actualmente importante, como lo muestra la intensa actividad existente en su desarrollo. En este contexto merecen citarse los trabajos pioneros de [20], las importantes contribuciones de Schnobrich [18] y Gupta [6] [8] [7] [9], y los recientes trabajos de Mang [13] [12].

## 2. OBJETIVOS

En los siguientes apartados se presenta un procedimiento tipo *elásto-plástico* de comprobación tensional de losas de hormigón armado. Se pueden distinguir tres formas de trabajo en las losas, denominándose *laja*, si está sometida solamente a esfuerzos axiales, *placa* si los únicos esfuerzos actuantes son de flexión pura y simplemente *losa* si se encuentra sometida a esfuerzos combinados de flexión pura y axiales. La característica fundamental de este procedimiento reside en la unidad del tratamiento que se aplica para la evaluación de los estados de tensiones que se producen tanto en las estructuras de *laja* como en las de *placa* y de *losa*. Esta unidad de planteamiento se alcanza a costa de introducir unas simplificaciones que, no obstante, permiten una evaluación de las tensiones suficientemente exacta.

## 3. ESTADO DEL CONOCIMIENTO

Se han llevado a cabo numerosas investigaciones con el objetivo anterior, si bien las primeras no incluían el efecto de las posibles fisuración en la capacidad resistente de la sección (ACI Committee 334 [1], Rosenbluth [24], Pàduart [21]). Posteriormente se comprobó el importante papel que la fisuras representaban en el mecanismo de transferencia de los esfuerzos a las tensiones en el hormigón y las armaduras. Por consiguiente se desarrollaron sucesivas teorías que incluían la fisuración en el hormigón en la comprobación tensional y que intentaban replicar los resultados experimentales existentes. Inicialmente Suenson [27] y Leitz [14] supusieron que las fisuras eran normales a la armadura y sólo consideraron ecuaciones de equilibrio, obteniendo resultados contradictorios. Posteriormente Peter [23] y Ebner [5] plantearon más correctamente el problema al suponer que las primeras fisuras aparecían perpendiculares a las direcciones de las tracciones principales e independientes de la posición de la armadura, al menos en las fases iniciales de la fisuración. En su análisis, que incluía las ecuaciones de compatibilidad, dedujeron la existencia de tensiones adicionales debidas al rozamiento entre fisuras. En las publicaciones [15] y [29] se determina el estado final de rotura de la sección utilizando las ecuaciones de equilibrio y se deduce la dirección de las fisuras mediante la condición de mínimo de la energía de deformación.

Mención especial merecen las contribuciones de Baumann en Alemania y Gupta en los EEUU. Las del primero se encuentran resumidas en las publicaciones [2] y [3]. En ellas se plantea el problema de forma correcta, utilizando las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad así como el principio del trabajo de deformación mínimo, para obtener una solución satisfactoria. Numerosos gráficos y tablas permiten la aplicación práctica de su método de comprobación y dimensionamiento de las armaduras dispuestas en malla ortogonal. Es interesante observar que en sus trabajos Baumann intuye la existencia de una rotación de las fisuras a medida que se incrementan los esfuerzos actuantes, ya que obtiene dos valores de la inclinación de la fisuración según la armadura se encuentre en fase elástica o en plastificación. El segundo autor presenta una serie de publicaciones [6] [8] y [7] en las que analiza todos los aspectos del problema. Finalmente, en la referencia [25], se presenta un panorama muy completo del estado actual del problema, y se indica las aportaciones más relevantes realizadas hasta la fecha.

Los anteriores estudios se centraron en el caso especial de armaduras dispuestas según dos direcciones, normalmente ortogonales entre sí. Una importante generalización a esta situación se debe a Medwadowski, quien, en la referencia [16]



formuló la comprobación de las armaduras en estructuras bidimensionales con esfuerzos dentro del plano, es decir, en lajas y en membranas, planteando para cada nivel de intensidad de la carga un ángulo variable de las fisuras. Los resultados obtenidos no difieren, en general, significativamente de los deducidos por otros métodos, como el de Baumann [3]. Sin embargo, en la referencia [17] al estudiar, en el caso de esfuerzo de tracción único, la influencia del ángulo  $\beta$  de desviación de las armaduras, medido respecto a la dirección del esfuerzo principal de tracción, en la disminución de la capacidad última de la sección, observó una reducción de esta capacidad desde un máximo para  $\beta=0$  a un mínimo en  $\beta=45^\circ$ .

En este trabajo se pretende generalizar los resultados alcanzados por [16] para lajas y membranas o láminas sin flexiones, es decir, estructuras sometidas únicamente a esfuerzos axiales, a otras estructuras de hormigón armado bajo otros esfuerzos. Se desarrollará aquí, por lo tanto, un procedimiento unificado de comprobación del estado de tensiones en estructuras 2-D de hormigón armado, que incluya, como caso particular, las membranas, y además permita el tratamiento de placas y láminas a flexión (sometidas a esfuerzos de flexión pura), así como a las losas y láminas generales (bajo esfuerzos combinados de flexión y axiales), con una disposición multidireccional de armaduras y formando éstas ángulos cualesquiera entre sí. Es decir, se considerarán mallas de armaduras constituidas por un número arbitrario de familias de barras según distintas direcciones. Algunas de estas situaciones pueden ocurrir en el armado de zonas de las esquinas de placas y láminas, en las que las tensiones principales típicamente no coinciden con las direcciones de armado y son elevadas, por lo que se suele disponer una capa adicional de armaduras en ángulo oblicuo con el armado ortogonal general.

En el estudio que se expone no se tendrá en cuenta la influencia de los esfuerzos cortantes con dirección normal al plano medio de la estructura, aunque sí evidentemente los esfuerzos cortantes contenidos en dicho plano, conocidos a veces por esfuerzos rasantes. La característica de la metodología que se presenta para resolver el problema de dimensionamiento y comprobación tensional de las estructuras 2-D de hormigón armado reside en el uso para su resolución de las ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y constitutivas, sin precisar ningún criterio de mínimo pero sí se tiene en cuenta la variación de la inclinación de la fisura, cuando existe, con la intensidad de los esfuerzos. Este hecho, aparentemente singular, ha sido confirmado en ensayos experimentales y previsto como resultado en otros métodos [23].

La metodología se expone a continuación de acuerdo con los siguientes apartados. En primer lugar, tras las pertinentes definiciones básicas, se resumen las hipótesis que se utilizan en la solución del problema. A continuación, en un siguiente apartado, el planteamiento de solución del caso laja, ya estudiado por Medwadowski, se presenta según una nueva formulación que permite su extensión a los casos de placa y lámina, los cuales se exponen dentro de un único apartado posterior. En este apartado se plantea el caso general de losa y lámina, que incluyen las situaciones de placa y laja, así como las análogas de membrana y lámina sin extensión, como casos particulares. Finalmente, se muestran algunos ejemplos de aplicación de la metodología de este trabajo que se resuelven mediante un sencillo programa de computador, capaz de comprobar de forma práctica el estado tensional de las armaduras de una estructura bidimensional en función del factor de amplificación de las acciones.

#### 4. DEFINICIONES

Una *losa* se define como una estructura 3-D o tridimensional cuya superficie media es un plano y su espesor  $h$  es pequeño respecto a las dos restantes dimensiones. En el estudio elástico de la losa se suele disponer un sistema cartesiano dextrógiro de ejes globales trirrectangular de coordenadas  $Ox_1x_2x_3$  de forma que los ejes  $Ox_1$  y  $Ox_2$  se encuentren contenidos en el plano medio y por lo tanto el eje  $Ox_3$  sea perpendicular al mismo (Figura 1).



Figura 1.- Esfuerzos de losa.

Los esfuerzos, que existen en un punto del plano medio de la losa, se pueden dividir en dos grupos, que se representan en la figura 1:

1. Los esfuerzos contenidos en el plano medio o de extensión, que se describen mediante un tensor  $\mathbf{N}$  cuyas componentes son axiles y cortantes dentro del plano.
2. Los esfuerzos fuera del plano o de flexión definidos por un tensor de momentos flectores y torsores  $\mathbf{M}$  y el vector de esfuerzos cortantes  $\mathbf{Q}$  normales al plano.

Bajo ciertas condiciones de cargas y contorno en la losa, el comportamiento de esta puede degenerar en uno en el que sólo aparecen esfuerzos de uno de los dos grupos anteriores. A continuación se describen estos dos casos.

La *laja* constituye un caso particular de la losa cuando está sometida a acciones que producen tensiones significativas cuyas resultantes o esfuerzos son fuerzas contenidas en su plano medio. Todos los esfuerzos de la laja se representan por un tensor  $\mathbf{N} = (N_{ij}) = (N_{11}, N_{12}, N_{22}, N_{21})$  en el que la componente  $N_{ij}$  representa la resultante de las tensiones  $\sigma_{ij}$ , que actúan en la sección  $x_i = \text{constante}$  y con dirección según  $Ox_j$ . Los esfuerzos  $N_{ii}$  son axiles positivos (tracción) o negativos (compresión) y los  $N_{12} = N_{21}$  corresponden a esfuerzos de corte en el plano, a veces denominados rasantes.

Otro caso particular de losa corresponde a la *placa*. En ella las acciones generan tensiones significativas que conducen a esfuerzos momentos flectores y torsores así como a esfuerzos cortantes cuyas direcciones son normales al plano medio de la losa. Los esfuerzos de flexión y torsión se describen por el tensor  $\mathbf{M} = (M_{ij}) = (M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{21})$ , cuya componente  $M_{ij}$  es positiva si produce tensiones positivas  $\sigma_{ij}$  en la zona positiva de la sección  $x_i$ , es decir, en la zona de coordenadas tales que  $x_i > 0$ . La tensión  $\sigma_{ij}$  es positiva si su componente frontal sobre la cara  $x_i$  coincide con la dirección positiva del eje  $Ox_j$ . Además de los esfuerzos anteriores en la *placa* existen otros denominados de cortante, que se recogen en el vector columna  $\mathbf{Q} = (Q_i) = (Q_1, Q_2)$ , cuya componente  $Q_i$  es la fuerza resultante de las tensiones cortantes  $\sigma_{ij}$  que actúan sobre la cara  $x_i$  y su signo es positivo si su dirección en la cara frontal coincide con la positiva del eje  $Ox_j$ . Normalmente estos esfuerzos cortantes no son determinantes en el diseño de las placas y el hormigón sin armaduras es suficiente para resistirlos, por lo que no se consideran en el cálculo de la comprobación tensional de las placas armadas que se lleva a cabo más adelante.

En la losa general o estructura *losa* existe la combinación de todos los esfuerzos anteriores, es decir, de  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{Q}$ , pero como en el caso de la *laja* no se tendrán en cuenta los esfuerzos de cortante  $\mathbf{Q}$  en la determinación de la capacidad resistente de una sección de una losa<sup>1</sup>.

## 5. HIPÓTESIS

El método, que se expone en los siguientes apartados, de comprobación de la armadura de la losa en sus distintas formas de trabajo, laja, placa y losa propiamente dicha, se basa en las hipótesis que se enumeran a continuación:

- a) Los esfuerzos de la losa se obtienen por medio de un cálculo lineal y elástico de ésta sometida a las cargas de servicio.
- b) Para cualquier estado de acciones comprendido entre las del estado límite de servicio (ELS) y las del estado límite último (ELU) los esfuerzos se suponen que varían monótona y proporcionalmente a las cargas existentes en dicho estado de acciones. Como consecuencia de este recorrido de las acciones no se producen descargas en las tensiones que aparecen debidas a los esfuerzos en la sección que se considera. Por consiguiente si  $\mathbf{P}$  es el vector de cargas que actúan en el estado de servicio y que genera los esfuerzos expresados en forma vectorial  $\mathbf{N}_0$  ó  $\mathbf{M}_0$  o ambos, entonces cualquier estado de cargas  $\lambda \mathbf{P}$  produce los esfuerzos proporcionales  $\mathbf{N}_0^\lambda = \lambda \mathbf{N}_0 = (\lambda N_{11}, \lambda N_{22}, \lambda N_{12})^T$  o bien  $\mathbf{M}_0^\lambda = \lambda \mathbf{M}_0 = (\lambda M_{11}, \lambda M_{22}, \lambda M_{12})^T$  o ambos. Se observa que las componentes de los esfuerzos mantienen proporciones constantes entre sí y el valor de  $\lambda$  varía entre 1 y el coeficiente de amplificación de las cargas  $\gamma_f$  que se considere en el agotamiento.

<sup>1</sup>La metodología que se expone a continuación se aplica a losas estrictamente pero puede ser extendida a estructuras 3-D tipo lámina que aparecen como idealización de estructuras sólidas tridimensionales de pequeño espesor. La lámina se describe por una superficie media, de simple o doble curvatura, con una ley de espesores función del punto de dicha superficie. Según el tipo de acciones a las que está sometida y las condiciones de contorno de la lámina, se distingue: la *membrana* con esfuerzos directos en el plano tangente de cada punto, es decir, esfuerzos  $\mathbf{N}$ , la *lámina a flexión pura* cuyos esfuerzos son los momentos  $\mathbf{M}$  y los esfuerzos cortantes  $\mathbf{Q}$  y la *lámina general* que experimenta una combinación de los dos grupos de esfuerzos anteriores. Se comprende que el comportamiento en un punto de una lámina puede llevarse a cabo de forma suficientemente aproximada estudiando, como losa, el de las tensiones contenidas en el plano tangente de la superficie media de la lámina, aunque es preciso considerar las posibles fuerzas de desvío de las armaduras.

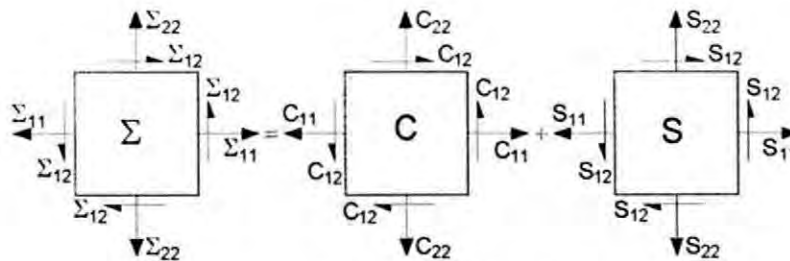


Figura 2.- Mecanismo de transferencia de los esfuerzos en la losa.

c) Las tensiones  $\sigma_{ij}$  en cada capa ( $x_3, x_3+dx_3$ ) en un elemento diferencial  $dx_1dx_2$  se transfieren al hormigón y a la armadura de forma que la suma de las capacidades resistentes de ambos equilibran aquellas en toda la sección. Matemáticamente se escribe (Figura 2):

$$\Sigma = C + S \quad (1)$$

siendo  $\Sigma = (\Sigma_{ij}) = (\Sigma_{11}; \Sigma_{12}; \Sigma_{21}; \Sigma_{22})$  el tensor que contiene los esfuerzos producidos por las acciones,  $C = (C_{ij}) = (C_{11}; C_{12}; C_{21}; C_{22})$  el tensor que contiene las componentes de la capacidad resistente del hormigón y  $S = (S_{ij}) = (S_{11}; S_{12}; S_{21}; S_{22})$  el del acero indicativo de su capacidad resistente.

d) Las barras de las armaduras sólo resisten esfuerzos longitudinales o axiales. No se considera, por lo tanto, los esfuerzos cortantes que pueden resistir por su débil rigidez a flexión en el plano medio de la losa.

e) No se tiene en cuenta el efecto del incremento de la rigidez media a tracción del elemento hormigón-armadura (*tension stiffening*) con relación a la proporcionada por la armadura sola. Este efecto es decreciente al aumentar el nivel de la tracción en la armadura y está producido por el hormigón en tracción, adherido al acero, en la zona entre fisuras.

Las dos hipótesis anteriores conducen a una subestimación de la resistencia del elemento hormigón armado, es decir, son conservadoras.

f) El hormigón sólo resiste a compresión, es decir, se desprecia su capacidad resistente a tracción dado su valor comparativamente débil y la gran dispersión inherente al mismo.

g) Eventualmente, en un punto determinado de la losa aparece una fisura cuya dirección depende de la magnitud de las tensiones actuantes, es decir, del coeficiente  $\lambda$  de seguridad de las acciones. A lo largo de la fisura no se considera la posibilidad de transferencia de cortante mediante mecanismos de rozamiento (*aggregate interlock*) o de interconexión del árido.

h) Existe adherencia perfecta entre las armaduras y el hormigón, es decir, no se considera la existencia de posibles deslizamientos entre ambos.

i) Las leyes de comportamiento de los materiales se simplifican como sigue:

Para el hormigón el modelo constitutivo en compresión más simple corresponde a un diagrama monodimensional tipo parábola-rectángulo o en forma más general con rama descendente, de acuerdo con las expresiones sugeridas por Hognestad [10]:

Rama ascendente en compresión

$$\sigma_c = f_c^* \frac{\epsilon_c}{\epsilon_0} \left( 2 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_0} \right) \quad \text{con} \quad 0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_0 \quad (2)$$

siendo  $f_c^*$  la tensión máxima de compresión, que se suele expresar en función de la resistencia a compresión  $f_c$ , medida en probeta normalizada cilíndrica, mediante la relación  $f_c^* = r_c f_c$ . Hognestad propone el valor  $r_c = 0,85$  para barras prismáticas, si bien otros autores utilizan  $r_c = 1$ . La deformación  $\epsilon_0$  correspondiente a la máxima tensión de compresión viene dada por la expresión



$$\varepsilon_0 = 2 \frac{f_c^*}{E_{ci}} \quad (3)$$

en la cual  $E_{ci}$  es el módulo de elasticidad tangente inicial. Al diferenciar (2) se deduce:

$$E_{ic} = \frac{d\sigma_c}{d\varepsilon_c} = E_{ci} \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right) \quad (4)$$

Rama descendente en compresión

$$\sigma_c = f_c^* \left[ 1 - (1 - \beta) \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_0}{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_0} \right] \quad \text{con} \quad \varepsilon_0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu} \quad (5)$$

con  $\beta$  la fracción de la tensión correspondiente a la deformación última de compresión  $\varepsilon_{cu}$  respecto a la tensión máxima de compresión  $f_c^*$ . Los valores sugeridos en [10] son  $\beta = 0,85$  y  $\varepsilon_{cu} = 0,0038$ . Si se diferencia (5) se deduce el siguiente módulo de elasticidad tangente de la rama descendente de compresión:

$$E_{ic} = - \frac{1 - \beta}{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_0} f_c^* \quad (6)$$

De la observación de las ecuaciones constitutivas anteriores se deduce que sólo se precisa conocer los parámetros  $f_c^*$  y  $E_{ci}$  para definir el comportamiento del hormigón.

En las anteriores ecuaciones no se considera la resistencia del hormigón a tracción ni su comportamiento a lo largo del tiempo bajo cargas elevadas de larga duración así como efectos de los decrementos e incrementos sucesivos de las tensiones.

El modelo constitutivo anterior utilizado para describir el comportamiento del hormigón es monodimensional, es decir, no tiene en cuenta la existencia de un estado 2-D de tensiones. Una formulación general que tenga en cuenta estados bidimensionales de tensiones en el hormigón se puede escribir en la forma

$$\sigma_{ci} = f_i(\varepsilon_{c1}, \varepsilon_{c2}) \quad i = 1, 2 \quad (7)$$

siendo respectivamente  $\sigma_{ci}$  y  $\varepsilon_{ci}$  las tensiones y las deformaciones principales de los correspondientes tensores actuantes en el punto. Se han utilizado distintos modelos de ecuaciones en la literatura técnica con este fin, perteneciendo la mayoría de ellos a una de las tres clases siguientes:

Modelos plásticos,  
Modelos endocrónicos y  
Modelos elásticos no lineales.

El ajuste de los parámetros de estos modelos del *material* hormigón se basan en los estudios experimentales llevados a cabo por Kupfer y otros [11]. Por otra parte presentan especial interés los resultados obtenidos por Vecchio y Collins [28] tras una intensa investigación experimental en elementos de hormigón armado sometidos a esfuerzos cortante puro. Estos autores sugieren la siguiente relación que muestra la influencia de la máxima deformación de tracción en la compresión principal del material *hormigón armado*<sup>2</sup>:

$$\sigma_{c2} = f_{2max} \left[ 2 \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}} - \left( \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}} \right)^2 \right] \quad \text{con} \quad \frac{f_{2max}}{f_c} = \frac{1}{0,8 + 0,170 \varepsilon_1} \leq 1$$

<sup>2</sup> Estos autores también han presentado una expresión que permite evaluar el efecto de *tensión stiffening* en el material *hormigón armado*.

La inclusión de estas ecuaciones constitutivas más realistas en el procedimiento de cálculo que se presenta no significa ninguna dificultad conceptual pero sí una mayor complejidad de cálculo y de exposición teórica al ser preciso tener en cuenta la variación de la tensión en el hormigón al producirse un cambio en una de las deformaciones principales.

. Para el modelo constitutivo del acero se supone que éste es un material monodimensional cuyo diagrama tensión-deformación es elasto-plástico perfecto tanto en tracción como en compresión.

- Fase elástica en tensión o compresión primarias

$$\sigma_s = E_{s1} \varepsilon_s, \quad E_{ts} = E_{s1} \quad \text{si} \quad 0 \leq \left\| \varepsilon_s \right\| \leq \frac{f_{sy}}{E_{s1}} \quad (8)$$

- Fase plástica en tensión o compresión primarias

$$\sigma_s = E_{s2} \varepsilon_s \pm f_{sy} \left( 1 - \frac{E_{s2}}{E_{s1}} \right), \quad E_{ts} = E_{s2} \quad \text{si} \quad \left\| \varepsilon_s \right\| \geq \frac{f_{sy}}{E_{s1}} \quad (9)$$

El módulo de elasticidad tangente se designa por

$$E_{ts} = \frac{d\sigma_s}{d\varepsilon_s}$$

Al no considerarse, por simplicidad, la existencia de descargas de las tensiones no se tiene en cuenta el efecto Bauschinger.

Las hipótesis y simplificaciones anteriores permiten predecir la capacidad resistente en un punto de la laja así como la dirección de la fisura en concordancia aceptable con los resultados experimentales.

## 6. ARMADURAS EN LAJAS Y MEMBRANAS

### 6.1. Planteamiento del problema

La laja se supone que es de hormigón armado con una armadura conocida, que se dispone en el plano medio de la laja o bien se reparte de forma igual en dos planos, superior e inferior, equidistantes de dicho plano medio y evidentemente protegida del exterior por un recubrimiento. La armadura está constituida por varias familias de barras rectas paralelas igualmente espaciadas y cada familia  $i = 1, 2, \dots, N$  se define por su intensidad de armadura  $A_i$  expresada en área de su sección por unidad de longitud de separación (por ejemplo  $\text{cm}^2/\text{cm}$  o mejor en unidades coherentes como  $\text{mm}^2/\text{mm}$ ) y según su dirección medida por el ángulo  $\alpha_i$  que forma cada barra con el eje  $O_x$ . En la Figura 3 se muestran estos datos, con  $A_i$  la armadura resistente al esfuerzo axial situada en planta con un ángulo  $\alpha_i$ .

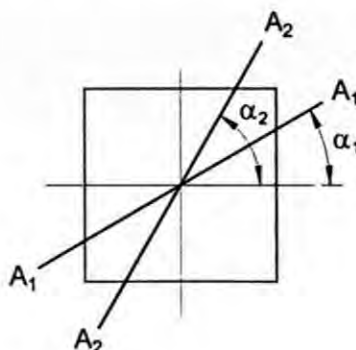


Figura 3.- Disposición de las armaduras de la laja.



Por otra parte se conocen los parámetros que definen las leyes del comportamiento de los dos materiales, hormigón y acero, que se ha descrito en el apartado 6 anterior.

El hormigón se define por los parámetros que se suponen son datos: El módulo de elasticidad inicial  $E_{ci}$  y la resistencia característica  $f_c^*$ ; se admite que  $\beta = 0,85$  y  $\varepsilon_{cu} = 0,0038$ . Respecto al acero los parámetros que se consideran datos son el módulo de elasticidad  $E_s$ , la tensión de plastificación  $f_{yp}$ , la deformación de rotura  $\varepsilon_{su}$  y el módulo de elasticidad con endurecimiento por deformación inicial  $E_{s2}$ .

Como es usual en el dimensionamiento de las estructuras de hormigón armado, se adopta el criterio de que en el hormigón la deformación  $\varepsilon_c$  y la tensión  $\sigma_c$  tienen signo positivo si son de acortamiento y compresión respectivamente. No obstante, la deformación  $\varepsilon_s$  y la tensión  $\sigma_s$  en el acero se toman positivas cuando son alargamiento y tracción.

Las ecuaciones de equilibrio (1) en un elemento diferencial de laja  $dx_1 dx_2$ , en un punto determinado, se escriben como sigue

$$\lambda \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} dx_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{cij} dx_3 + \sum_{k=1}^N \sigma_{sij} A_k \quad \text{con } i,j=1,2 \quad (10)$$

con  $h$  el espesor de la losa,  $\sigma_{ij}$  las tensiones de servicio producidas por los esfuerzos  $N_{ij}$  en el punto y  $\lambda$  el coeficiente de amplificación de las acciones exteriores de servicio que producen estos esfuerzos. Las tensiones resistentes del hormigón y del acero en el elemento se designan respectivamente por  $\sigma_{cij}$  y  $\sigma_{sij}$ .

Finalmente, un planteamiento correcto del problema exige la consideración de las ecuaciones de compatibilidad. Para ello se utiliza un método en rigidez y se adoptan, por lo tanto, tres incógnitas básicas. Las dos primeras son las deformaciones longitudinales principales en el hormigón  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  con valor positivo si corresponden a alargamiento y con la notación tal que  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$ . La tercera incógnita básica es el ángulo  $q$  de la dirección principal de  $\varepsilon_1$  con el eje  $Ox_1$ . En el caso de que  $\varepsilon_1$  sea alargamiento, es decir,  $\varepsilon_1 \geq 0$ , entonces este ángulo coincide con el que forma la dirección de las fisuras con el eje  $Ox_2$  (Figura 4). El ángulo  $q$  se mide con el sentido antihorario positivo, a partir del eje  $Ox_1$  y su rango

de variación es de  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

A partir de estas incógnitas se deducen las tensiones principales en el hormigón mediante la aplicación de las ecuaciones (2) a (6), con lo que resulta:

$$\sigma_{c1} = \sigma_c(-\varepsilon_1) \quad , \quad \sigma_{c2} = \sigma_c(-\varepsilon_2) \quad (11)$$

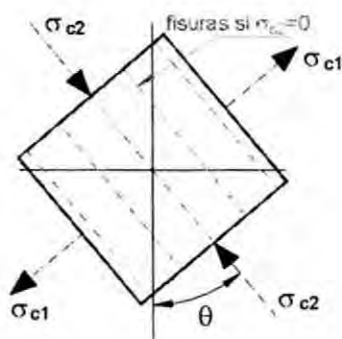


Figura 4.- Componentes de los esfuerzos resistentes del hormigón.

Las componentes del tensor de tensiones según los ejes son:

$$\begin{aligned}\sigma_{c11} &= \sigma_{c1} \cos^2 \theta + \sigma_{c2} \sin^2 \theta = \sigma_c (-\varepsilon_1) \cos^2 \theta + \sigma_c (-\varepsilon_2) \sin^2 \theta \\ \sigma_{c22} &= \sigma_{c1} \sin^2 \theta + \sigma_{c2} \cos^2 \theta = \sigma_c (-\varepsilon_1) \sin^2 \theta + \sigma_c (-\varepsilon_2) \cos^2 \theta \\ \sigma_{c12} &= (\sigma_{c1} - \sigma_{c2}) \sin \theta \cos \theta = [\sigma_c (-\varepsilon_1) - \sigma_c (-\varepsilon_2)] \sin \theta \cos \theta\end{aligned}\quad (12)$$

Las componentes según los ejes de los esfuerzos axiales resistentes en el hormigón, que miden la capacidad resistente de este material en la sección, se obtienen integrando las ecuaciones anteriores (12) a lo largo del espesor de la laja, con lo que se llega al siguiente resultado:

$$N_{cij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{cij} dx_3 = h \sigma_{cij} \quad i, j = 1, 2 \quad (13)$$

Los esfuerzos principales resistentes del hormigón se escriben, de forma análoga, como sigue:

$$N_{ci} = h \sigma_{ci} \quad i = 1, 2 \quad (14)$$

En relación con el acero, la deformación longitudinal  $\varepsilon_{si}$  en las barras de la familia  $i$  de armaduras se obtiene de acuerdo con las ecuaciones de la elasticidad como sigue:

$$\varepsilon_{si} = \varepsilon_1 \cos^2 (\theta - \alpha_i) + \varepsilon_2 \sin^2 (\theta - \alpha_i) \quad (15)$$

El esfuerzo axial,  $S_i$ , de tracción o compresión, en una barra de la familia  $i$  como la que se representa en la Figura 5, se deduce mediante las ecuaciones constitutivas del acero y su valor es:

$$S_i = A_i \sigma_s (\varepsilon_{si}) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (16)$$

o bien al expresarlo en función de las incógnitas básicas se escribe:

$$S_i = S_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta) \quad (17)$$

siendo

$$S_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta) = A_i \sigma_s [\varepsilon_1 \cos^2 (\theta - \alpha_i) + \varepsilon_2 \sin^2 (\theta - \alpha_i)] \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N$$

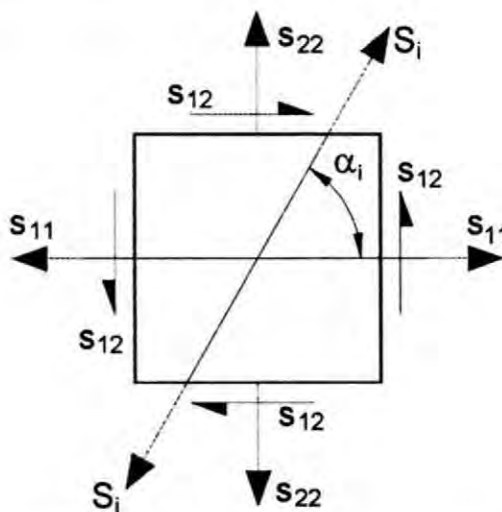


Figura 5.- Componentes de los esfuerzos resistentes de una barra.

El esfuerzo  $S_i$  de la barra produce las siguientes componentes de tensión, en la capa del plano en el que está situada, referidas a los ejes de coordenadas (Figura 5):

$$S_{11} = \sigma_{s11}^i = S_i \cos^2 \alpha_i, \quad S_{22} = \sigma_{s22}^i = S_i \sin^2 \alpha_i, \quad S_{12} = \sigma_{s12}^i = \sigma_{s21}^i = S_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i \quad (18)$$

La capacidad resistente de la armadura  $i$  se mide, por lo tanto, por las componentes de los esfuerzos resistentes de esta armadura, es decir:

$$N_{sjk}^i = \sigma_{sjk}^i \quad j, k = 1, 2 \quad (19)$$

Al considerar el total de las armaduras, que está compuesta por  $N$  barras, las ecuaciones (19), se transforman en las siguientes que permiten obtener las componentes de los esfuerzos resistentes debidos al acero:

$$\begin{aligned} N_{s11} &= \sum_{i=1}^N N_{11}^i = \sum_{i=1}^N S_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta) \cos^2 \alpha_i \\ N_{s22} &= \sum_{i=1}^N N_{22}^i = \sum_{i=1}^N S_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta) \sin^2 \alpha_i \\ N_{s12} &= N_{s21} = \sum_{i=1}^N N_{12}^i = \sum_{i=1}^N S_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta) \sin \alpha_i \cos \alpha_i \end{aligned} \quad (20)$$

Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas del elemento diferencial en un punto de la laja (10) se pueden expresar en términos de esfuerzos:

$$-N_{cij} + N_{sij} = \lambda N_{i,j} \quad i, j = 1, 2 \quad (21)$$

en las cuales el signo negativo a los esfuerzos resistentes en el hormigón aparece al proyectar sobre los ejes y tener en cuenta el sentido adoptado para las tensiones en este material. Las ecuaciones (21) constituyen un sistema de ecuaciones no lineales en las incógnitas básicas  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  y  $\theta$ , las cuales se pueden expresar de un modo explícito como sigue:

$$\begin{aligned} -h\sigma_c(-\varepsilon_1) \cos^2 \theta - h\sigma_c(-\varepsilon_2) \sin^2 \theta + \sum_{i=1}^N S_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta) \cos^2 \alpha_i &= \lambda N_{11} \\ -h\sigma_c(-\varepsilon_1) \sin^2 \theta - h\sigma_c(-\varepsilon_2) \cos^2 \theta + \sum_{i=1}^N S_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta) \sin^2 \alpha_i &= \lambda N_{22} \\ -[h\sigma_c(-\varepsilon_1) - h\sigma_c(-\varepsilon_2)] \sin \theta \cos \theta + \sum_{i=1}^N S_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta) \sin \alpha_i \cos \alpha_i &= \lambda N_{12} \end{aligned} \quad (22)$$

## 6.2. Solución

El sistema de ecuaciones (22), que ha sido deducido en el apartado anterior, representa un planteamiento del problema en movimientos, es decir, se consideran las ecuaciones de equilibrio en las que intervienen los esfuerzos, los cuales se expresan en términos de los movimientos o, en este caso, de las deformaciones. Utilizando esta metodología, el conjunto de ecuaciones de equilibrio se reducen a tres en las incógnitas básicas siguientes: Las dos deformaciones principales  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  y el ángulo  $\theta$  de inclinación de la fisura o perpendicular al esfuerzo máximo principal en el hormigón.

Con objeto de simplificar la notación se describe el sistema no lineal (22) en forma matricial como sigue:

$$\mathbf{k}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta) = \lambda \mathbf{N}_0 \quad (23)$$

siendo

$$\mathbf{N}_0 = (N_{11}, N_{22}, N_{12})^T$$

Se observa que todos los términos  $k_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , del vector  $\mathbf{k}$  de dimensión  $3 \times 1$ , dependen de las incógnitas básicas y que el vector independiente de dimensión  $3 \times 1$  es simplemente el vector columna de dimensión 3, que contiene los esfuerzos de servicio, multiplicado por el coeficiente de amplificación  $\lambda$ .

El carácter no lineal de este sistema de tres ecuaciones (23) exige en general un método de solución numérico<sup>3</sup>. Un procedimiento simple de resolución del sistema de ecuaciones (23) es de carácter iterativo.

<sup>3</sup> En algunos casos simples [22] [8] con un comportamiento lineal del hormigón y con una armadura constituida por una malla ortogonal de barras se puede reducir el sistema no lineal anterior a una ecuación de cuarto grado en  $\tan \theta$ .



En este procedimiento se supone en cada iteración un valor inicial de  $\theta$  y se resuelven en  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  dos de las tres ecuaciones del sistema. Si se simplifican las ecuaciones constitutivas de los materiales suponiendo que son lineales, la resolución de este sistema de dos ecuaciones es inmediata y directa, al ser lineales. Incluso, en el caso general de que este sistema de ecuaciones sea no lineal, se puede resolver por medio de una iteración muy simple, dada la pequeña variación que se produce en los valores de los módulos de elasticidad secantes de los materiales. Una vez calculados los valores de las deformaciones principales, se introducen en la ecuación restante del sistema y se calcula en ella el valor del nuevo ángulo  $\theta$  que se compara con el inicialmente supuesto. El proceso iterativo se detiene cuando el valor de la iteración anterior y el nuevo calculado de la incógnita  $\theta$  coinciden dentro de un orden de aproximación deseado. Este método iterativo converge relativamente bien, aunque la elección de las dos ecuaciones que se resuelven exige comprobar que constituyen un sistema no singular.

Un procedimiento alternativo de resolución del sistema de ecuaciones anterior se basa en el método de Newton-Raphson, el cual permite el estudio del comportamiento del elemento laja a medida que se incrementa el valor de coeficiente de amplificación  $\lambda$ .

El sistema incremental en rigidez se expresa como sigue:

$$\mathbf{K}_t d\mathbf{r} = d\mathbf{p} \quad (24)$$

en el que se ha utilizado la notación:

$$\mathbf{K}_t = [k_t(i, j)] \quad , \quad d\mathbf{r} = \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\theta \end{bmatrix} \quad , \quad d\mathbf{p} = d\lambda \mathbf{N}_0 = d\lambda \begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{bmatrix}$$

La expresión de la matriz tangente se obtiene a partir de las ecuaciones incrementales de equilibrio del elemento laja de hormigón armado y se obtiene, de acuerdo con [26] el resultado siguiente:

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{C}_N + \mathbf{S}_N$$

siendo la contribución del hormigón a esta matriz

$$\mathbf{C}_N = h \begin{bmatrix} E_{tc}(-\varepsilon_1)\cos^2\theta & E_{tc}(-\varepsilon_2)\sin^2\theta & A\sin 2\theta \\ E_{tc}(-\varepsilon_1)\sin^2\theta & E_{tc}(-\varepsilon_2)\cos^2\theta & -A\sin 2\theta \\ E_{tc}(-\varepsilon_1)\sin\theta\cos\theta & -E_{tc}(-\varepsilon_2)\sin\theta\cos\theta & -A\cos 2\theta \end{bmatrix}$$

con  $A = \sigma_c(-\varepsilon_1) - \sigma_c(-\varepsilon_2)$  y la del acero

$$\mathbf{S}_N = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} B_{1i}\cos^2(\theta - \alpha_i) & B_{1i}\sin^2(\theta - \alpha_i) & B_{1i}(-\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\sin 2(\theta - \alpha_i) \\ B_{2i}\cos^2(\theta - \alpha_i) & B_{2i}\sin^2(\theta - \alpha_i) & B_{2i}(-\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\sin 2(\theta - \alpha_i) \\ B_{3i}\cos^2(\theta - \alpha_i) & B_{3i}\sin^2(\theta - \alpha_i) & B_{3i}(-\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\sin 2(\theta - \alpha_i) \end{bmatrix}$$

con  $B_{1i} = A_i E_{ts}(\varepsilon_{si})\cos^2\alpha_i$  ,  $B_{2i} = A_i E_{ts}(\varepsilon_{si})\sin^2\alpha_i$  ,  $B_{3i} = A_i E_{ts}(\varepsilon_{si})\sin\alpha_i\cos\alpha_i$

La resolución del sistema (23) se lleva a cabo de acuerdo con un procedimiento estándar incremental iterativo basado en el método de Newton-Raphson. Se pueden adoptar como componentes del vector inicial  $\mathbf{r}$  las correspondientes a la solución elástica y homogénea.

Una vez obtenida la solución  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\theta$  para cada valor discreto de  $\lambda$  se deducen las compresiones principales  $\sigma_{ci}$ ,  $i = 1, 2$  en el hormigón usando la expresión (11). Naturalmente, se observa que, de acuerdo con las ecuaciones constitutivas del hormigón, si la deformación  $\varepsilon_i$  es un acortamiento, entonces la tensión resultante es una compresión. Al contrario, en el caso de que la deformación sea alargamiento la tensión correspondiente en el hormigón es nula. A partir de las expresiones (12) y (13) se determinan las componentes del vector de esfuerzos representativo de la capacidad resistente del hormigón.  $N_{cij}$ ,  $i, j = 1, 2$

En relación con el acero, los esfuerzos axiales existentes en las barras de las distintas familias de armaduras, que pueden ser tanto de tracción como de compresión, se calculan en función de las incógnitas básicas utilizando la fórmula (17) y las componentes de los esfuerzos que resisten todas las armaduras se obtienen de acuerdo con (20).

### 6.3. Ejemplo de aplicación

La metodología desarrollada en los apartados precedentes se aplicó a un caso estudiado en [16] correspondiente a una laja de espesor  $h = 76,2$  mm, en la que se ha dispuesto una armadura distribuida de forma homogénea según tres direcciones definidas por los ángulos  $\alpha_i = (0^\circ, 45^\circ, 90^\circ)$  y cuyas áreas respectivas por unidad de longitud son  $A_i = (0,762; 1,524; 0,762)$  mm<sup>2</sup>/mm.

El comportamiento para los materiales, supuesto en el ejemplo publicado, ha sido elastoplástico perfecto para el acero y lineal para el hormigón. Las propiedades de los materiales se simplificaron a un diagrama lineal para el hormigón de módulo de elasticidad  $E_c = 24732$  MPa y uno bilineal sin endurecimiento para el acero  $E_s = 206850$  MPa y  $E_{s2} = 0$  con una tensión de fluencia de valor  $f_{sy} = 276$  MPa.

Los esfuerzos de servicio actuantes son  $N_0 = (0,088; 0,088; 0,175)^T$  kN/mm, lo que implica al ser  $N_{11}N_{22} - N_{12}^2 < 0$  que el punto de la placa se encuentra en tracción-compresión.

La solución se determina utilizando el programa de computador LAJA basado en el procedimiento incremental anteriormente descrito. Este programa permite comprobar el estado de las tensiones en el hormigón y las armaduras en un punto de la laja correspondiente a 150 intervalos de carga en un PC Pentium III en escasos segundos. En los párrafos siguientes se resumen algunos resultados obtenidos en las distintas fases del comportamiento del elemento.

#### 1. Fase inicial elástica

Todas las barras se comportan dentro del rango elástico, sin entrar en plastificación. Se obtienen los siguientes valores de las incógnitas básicas para  $\lambda = 1$

$$\theta = 29,025^\circ; \varepsilon_1 = 5,526 \times 10^{-4}; \varepsilon_2 = -1,230 \times 10^{-4}$$

con lo que resultan las correspondientes deformaciones en las barras:

$$\varepsilon_i = (3,940 \times 10^{-4}; 5,019 \times 10^{-4}; 3,613 \times 10^{-5})$$

Los esfuerzos que se producen en las barras son:

$$S_i = (0,062; 0,158; 0,006) \text{ kN/mm}$$

Los esfuerzos para los que cada barra alcanza la plastificación resultan:

$$S_{yi} = A_i f_{sy} = (0,210; 0,420; 0,210) \text{ kN/mm}$$

Por consiguiente los factores de amplificación que se tienen que aplicar para que cada una de las barras alcance la plasticidad se obtienen dividiendo los valores anteriores por los esfuerzos de éstos para  $\lambda = 1$  y resultan:

$$I_i = (3,387; 2,658; 35,000)$$

es decir, la segunda familia de barras (barras dispuestas a  $45^\circ$  en planta) entra en plastificación en primer lugar para  $\lambda = 2,658$ . Para este nivel de las cargas se presentan los esfuerzos debidos a las acciones exteriores:

#### a) Acciones exteriores e incógnitas

Axiles  $N_0 = (0,233; -0,233; 0,465)$  kN/mm

Incógnitas  $\theta = 29,086^\circ; \varepsilon_1 = 1,480 \times 10^{-3}; \varepsilon_2 = -3,425 \times 10^{-4}$

#### b) Resultados en el hormigón

Tensiones  $\sigma_{c1} = 0; \sigma_{c2} = -7,874 \times 10^{-3}$  kN/mm<sup>2</sup>

Axiles  $N_{c1} = 0; N_{c2} = -0,600$  kN/mm

## c) Resultados en las armaduras

Deformaciones:  $\varepsilon_{si} = (1,049 \times 10^{-3}; 1,333 \times 10^{-3}; 0,881 \times 10^{-3})$

Axiles  $S_i = (0,165; 0,421; 0,014)$  kN/mm

## 2. Fase intermedia elasto-plástica

Con las barras de la familia 2 en situación plástica, las siguientes que entran en plastificación son las de la familia 1, para el valor del coeficiente de amplificación  $\lambda = 2,841$ . Se deducen para este nivel de las cargas los siguientes resultados:

## a) Acciones exteriores e incógnitas

Axiles  $N_0 = (0,250; -0,250; 0,500)$  kN/mm

Incógnitas  $\theta = 30,271^\circ$ ;  $\varepsilon_1 = 1,891 \times 10^{-3}$ ;  $\varepsilon_2 = -3,793 \times 10^{-4}$

## b) Resultados en el hormigón

Tensiones  $\sigma_{c1} = 0$ ;  $\sigma_{c2} = -8,648 \times 10^{-3}$  kN/mm<sup>2</sup>

Axiles  $N_{c1} = 0$ ;  $N_{c2} = -0,659$  kN/mm

## c) Resultados en las armaduras

Deformaciones  $\varepsilon_{si} = (1,314 \times 10^{-3}; 1,744 \times 10^{-3}; 0,191 \times 10^{-3})$

Axiles  $S_i = (0,207; 0,421; 0,031)$  kN/mm

## 3. Estado último (plastificación total)

Finalmente las barras de la familia 3 permanecen todavía en fase elástica hasta que las cargas se incrementa por el factor  $\lambda = 3,034$ , con lo que se obtienen los siguientes resultados:

## a) Acciones exteriores e incógnitas

Axiles  $N_0 = (0,267; -0,267; 0,534)$  kN/mm

Incógnitas  $\theta = 25,601^\circ$ ;  $\varepsilon_1 = 8,633 \times 10^{-3}$ ;  $\varepsilon_2 = -4,851 \times 10^{-4}$

## b) Resultados en el hormigón

Tensiones  $\sigma_{c1} = 0$ ;  $\sigma_{c2} = -1,080 \times 10^{-2}$  kN/mm<sup>2</sup>

Axiles  $N_{c1} = 0$ ;  $N_{c2} = -0,823$  kN/mm

## c) Resultados en las armaduras

Deformaciones  $\varepsilon_{si} = (6,931 \times 10^{-3}; 7,627 \times 10^{-3}; 0,122 \times 10^{-3})$

Axiles  $S_i = (0,210; 0,420; 0,192)$  kN/mm

Estos valores del estado último por agotamiento se pueden calcular, si no se tienen en cuenta el posible endurecimiento del acero, directamente mediante el planteamiento de la ecuación final de equilibrio de los esfuerzos en el acero y en el hormigón en régimen plástico.

Mediante el programa LAJA la situación de agotamiento se produce, para el valor  $\lambda = 3,050$ , con lo que se obtienen los resultados prácticamente iguales a los publicados en [16], y que se resumen a continuación:

Esfuerzos  $N_0 = (0,268; 0,268; 0,537)$

Incógnitas  $r = (25,204; 9,535 \times 10^{-3}; -4,962 \times 10^{-4})$

Axiles en el hormigón  $N_{c1} = 0$ ;  $N_{c2} = -0,839$  kN/mm

Deformaciones en el acero  $\varepsilon_{si} = (6,931 \times 10^{-3}; 7,627 \times 10^{-3}; 1,217 \times 10^{-4})$

Axiles en el acero  $S_i = (0,210; 0,420; 0,209)$



La evolución de los resultados anteriores con el factor de carga se representa en las Figuras 6 a 8.

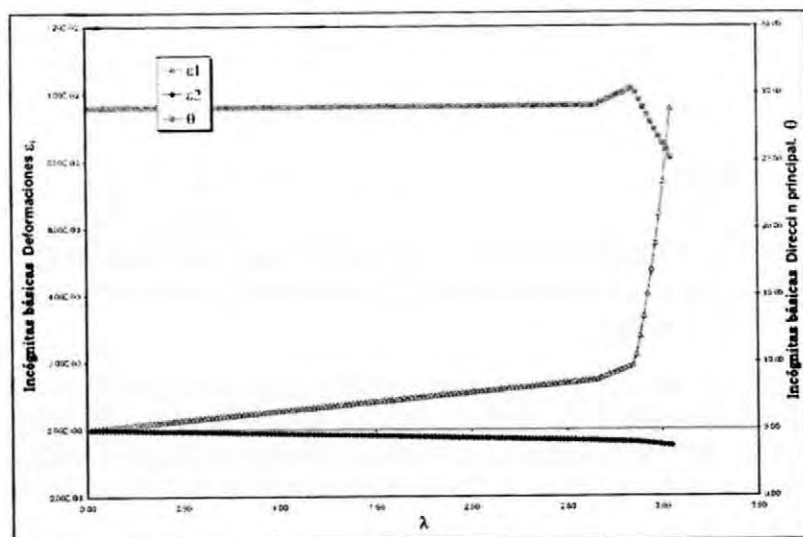


Figura 6.- Valores de las incógnitas básicas en función de  $\lambda$ .

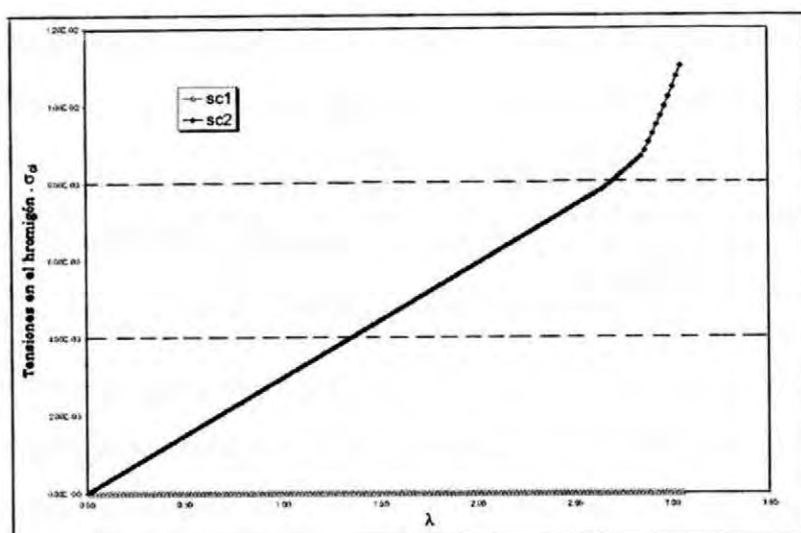


Figura 7.- Valores de las tensiones en el hormigón en función de  $\lambda$ .

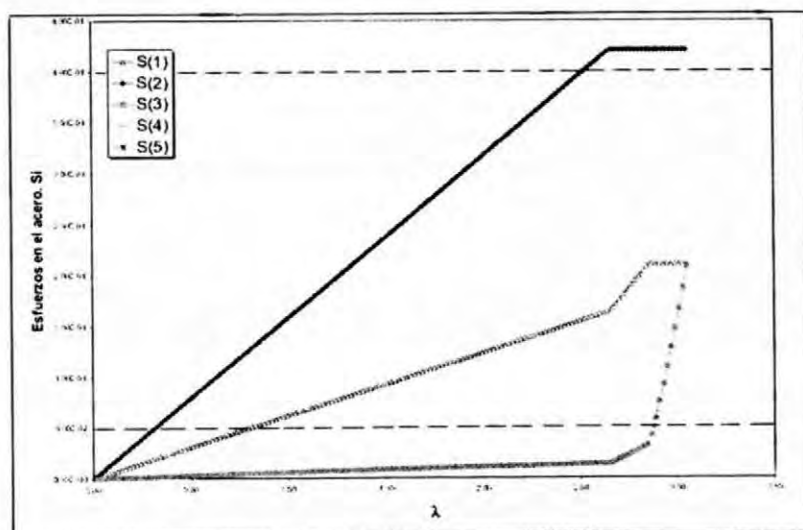


Figura 8.- Valores de los esfuerzos en el acero en función de  $\lambda$ .

A la vista de los resultados obtenidos en este ejemplo parece pertinente hacer los siguientes comentarios:

1. La inclinación de la fisura  $\theta$  varía, girando, con la intensidad de la carga, es decir, la fisura no es estática.
2. El ángulo de inclinación de la fisura no coincide con la dirección de la normal a la tensión principal máxima de los esfuerzos. Esta última es, en este caso

$$\frac{\arctg 2}{2} = 31,717^\circ$$

3. Al comparar las deformaciones  $\varepsilon_2$  perpendiculares a la dirección de la fisura se comprueba, en este ejemplo de aplicación, que el ancho de la fisura es mayor en la fase de servicio que en la de agotamiento. Se puede estimar que el ancho máximo de la fisura que se produce en servicio es del orden de 0,254 mm.

Los resultados comentados en los apartados 1 y 2 anteriores, se pueden explicar al considerar la anisotropía inherente al material compuesto *hormigón armado*- diferente del material homogéneo e isótropo *hormigón*- cuyas características dependen de las armaduras, tanto de su orientación como de su densidad, así como de la intensidad de carga. En efecto, el nivel de ésta conduce a comportamientos elásticos o plásticos de las armaduras y por consiguiente a una variación de la resistencia del elemento *hormigón armado*.

## REFERENCIAS

- [1] ACI Committee 334. *Concrete Shell Structures: Practice and Commentary*. American Concrete Institute, Detroit, Michigan, 1974.
- [2] Baumann, T. Tragwirkung orthogonaler Bewehrungnetze beliebiger Richtung in Flächentragwerken aus Stahlbeton. Technical Report 217, DSfSb, Berlin, W. Ernst und Sohn, 1972.
- [3] Baumann, T. Zur Frage der netzbewehrung von Flächentragwerken. *Der Bauingenieur*, 47:367–377, 1972.
- [4] Comisión Permanente del Hormigón. Ministerio de Fomento. *EHE. Instrucción de Hormigón Estructural. Real Decreto 2661/1998 de 11 de Diciembre*. Ediciones de Autor Técnico S.L., Madrid, 1999.
- [5] Ebner, F. Über den Einfluss der Richtungsabweichung der Bewehrung von der Hauptzugspannungsrichtung auf das Tragverhalten von Stahlbetonplatten. PhD thesis, Technische Hochschule Karlsruhe, 1964.
- [6] Gupta, A. K. Membrane reinforcement in shells. *Journal of Structural Division, ASCE*, 107(ST1):41–56, 1981.
- [7] Gupta, A. K. Membrane reinforcement in concrete shells: A review. In *Nuclear Engineering and Design* 82, pages 63–85, North Holland, Amsterdam, 1984.
- [8] Gupta, A. K. and Akbar, H. Cracking in reinforced concrete analysis. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 110(8):1735–1746, 1984.
- [9] Gupta, A. K. and Maestrini, S. An investigation of the ultimate behavior of hyperbolic cooling towers. *Engineering Structures*, 8(2):87–92, 1986.
- [10] Hognestad, E. A Study of Combined Bending and Axial Load in Reinforced Concrete Members. Report 1, University of Illinois, Engineering Experiment Station, Bulletin Series No 399, november 1951.
- [11] Kupfer, H. B. and Gerstle, K. H. Behavior of concrete under biaxial stresses. *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, 99:EM4, august 1973.
- [12] Lackner, R. and Mang, H. A. On the influence of the discretization on the collapse mode in ultimate load analysis of rc shells. In *CD-ROM Proceedings of the Fourth International Colloquium on Computation of Shells and Spatial Structures. IASS-IACM 2000. Chania (Crete)*. Papadrakakis, M., Samartín, A. and Oñate, E. (eds.), 2000.
- [13] Lackner, R. and Mang, H. A. Adaptive FE ultimate load analysis of reinforced concrete plates and shells. In *CD-ROM Proceedings of the First Structural Engineers World Congress San Francisco, USA.*, Oxford, 1998. Elsevier Science.
- [14] Leitz, H. Eisenbewehrte Platten bei allgemeinem Biegunszustand. *Die Bautechnik*, 16,17:155–157, 163–167, 1923.
- [15] Lenschow, R. J. and Sozen, M. A. A yield criterion for reinforced concrete under biaxial moments and forces. Report Civ. Eng. Studies, Struc. Research Series No 311, University of Illinois, july 1966.
- [16] Medwadowski, S. J. Multidirectional membrane reinforcement. *ACI Structural Journal*, 86(5):563–569, 1989.
- [17] Medwadowski, S. J. Variation in the strength of membranes with the direction of the reinforcement. *Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures*, 31(1-2):93–97, april-august 1990.
- [18] Milford, R. V. and Schnobrich, W. C. The effect of cracking on the ultimate load of reinforced concrete cooling towers. In *Proceedings of the 2nd International IASS Symposium on Natural Draft Cooling Towers, Ruhr Universit üt Bochum, Springer-Verlag*, volume 1, pages 319–332, 1984.
- [19] Ministerio de Obras Públicas. *Instrucción para el Proyecto de Obras de Hormigón*. Publicaciones de la Revista de Obras Públicas, Madrid, 1959.
- [20] Ngo, D. and Scordelis, A. C. Finite element analysis of reinforced concrete beams. *ACI Journal*, 64(3), 1967.
- [21] Paduart, A. Checking of the reinforcement sections of a concrete shell. *IASS Bulletin*, 15(53):39–44, 1973.
- [22] Perdikaris, P. C. White, R. N. and Gergely, P. Strength and stiffness of tensioned reinforced concrete panels subjected to membrane shear, two-way reinforcing. Report NUREG/CR-1602, Cornell University, prepared by U. S. Nuclear Regulatory Commission, 1980.

- [23] Peter, J. Zur Bewehrung von Scheiben und Schalen für Hauptspannungen Schiefwinklig zur Bewehrungsrichtung. PhD thesis, Technische Hochschule Stuttgart, 1964.
- [24] Rosenblueth, E. Shell reinforcement non parallel to principal stresses. *ACI Journal, Proceedings*, 27:61–71, 1955.
- [25] Sabnis, G. M. and Solanki, H. T. Membrane reinforcement in the concrete shell and curved panel structures- a state of the art. In *Proceedings of the IASS Symposium on Innovative Applications of Shell and Spatial Structures*. Bangalor (India) volume III, pages 177–181, 1988.
- [26] Samartin, A. An unified approach to verify the reinforcement in two dimensional reinforced concrete structures at service and ultimate loading. In Publication, IASS, 2002.
- [27] Suenson, E. Eisenbetonbewehrung unter einem Winkel mit der Richtung der Normalkraft. *Beton und Eisen*, 21(10):145–149, 1922.
- [28] Vecchio, F. J. and Collins, M. P. The modified compression field theory for reinforced concrete elements subjected to shear. *ACI Journal*, 83(2):219–231, Mar.-Apr. 1986.
- [29] Wästlund, G. and Hallbjörn, L. Beitrag zum Studium der Durchbiegung und des Bruchmomentes von Stahlbetonplatten mit schiefer Bewehrung. In *Aus Theorie und Praxis des Stahlbetonsbaus*. Berlin, W. Ernst und Sohn, pages 135–138, 1969.

\* \* \*